Chapitre-5-Notion de fonction

1) Déterminer des images et des antécédents

Activité

Thierry annonce à ses amis qu'il va leur faire un tour de magie. Il leur demande de :

① choisir un nombre de départ ;
② ajouter 10 ;
③ multiplier le résultat par 2 ;
④ soustraire 20 au résultat ;
⑤ annoncer le résultat final.

À chaque annonce d'un résultat final, Thierry arrive à deviner le nombre choisi au départ !

1. Tester le tour de Thierry en choisissant trois nombres différents.

2. Séverine a annoncé 18 comme résultat final. Peut-on deviner, comme Thierry, le nombre choisi au départ ?

3. Le nombre que l'on choisit au départ varie, on l'appelle **une variable**. Si on note x le nombre choisi au départ, quelle formule permet de calculer facilement le résultat final annoncé ?

4. On note $f(x)$ le résultat final annoncé (on lit « f de x »). f est le procédé de calcul que l'on appelle une fonction. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de départ choisi : x	0	3,5		–2	
Résultat final annoncé : $f(x)$			24		3

fonction f

5. On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f. Quelle est l'image de 12 par la fonction f ?

6. On dit que x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f. Donner un antécédent de 50 par la fonction f.

1. Tester le tour de Thierry en choisissant trois nombres différents.

① choisir un nombre de départ ;
② ajouter 10 ;
③ multiplier le résultat par 2 ;
④ soustraire 20 au résultat ;
⑤ annoncer le résultat final.

On peut choisir n'importe quels nombres, prenons les nombres 0 ; 2 ; 5

- 0
- $0+10=10$
- $2\times 10=20$
- $20-20=0$
- 0

- 2
- $2+10=12$
- $2\times 12=24$
- $40-20=4$
- 4

- 5
- $5+10=15$
- $2\times 15=30$
- $30-20=10$
- 10

Que peut-on constater du résultat trouvé ?

On peut constater que le résultat final est le produit du nombre de départ par 2

$A=\pi r^2$

2. Séverine a annoncé 18 comme résultat final. Peut-on deviner, comme Thierry, le nombre choisi au départ ?

Oui , on peut deviner le résultat, il suffit de multiplier 18 par 2 :

$$2\times 18=36$$

3. Le nombre que l'on choisit au départ varie, on l'appelle **une variable**. Si on note x le nombre choisi au départ, quelle formule permet de calculer facilement le résultat final annoncé ?

① choisir un nombre de départ ;
② ajouter 10 ;
③ multiplier le résultat par 2 ;
④ soustraire 20 au résultat ;
⑤ annoncer le résultat final.

Il suffit d'appliquer le programme pour le nombre x

- x
- $x + 10$
- $2 \times (x + 10) = 2 \times x + 2 \times 10 = 2x + 20$
- $2x + 20 - 20 = 2x$
- $2x$

Appliquer le Programme de calcul

Cela revient à

Donc la formule qui permet de calculer facilement est :

$$2x$$

Multiplier le nombre par de départ par 2

Important: quand on dit variable ca veut dire qu'on peut prendre n'importe quels nombres (sauf indication supplémentaire)

4. On note $f(x)$ le résultat final annoncé (on lit « f de x »). f est le procédé de calcul que l'on appelle une fonction. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Nombre de départ choisi : x	0	3,5		–2	
Résultat final annoncé : $f(x)$			24		3

fonction f

On peut écrire f(x)=2x

Il existe une autre notation

$f : \longmapsto 2x$

Nombre de départ : x	0	3,5	12	-2	1,5
Résultat final : f(x)	0	7	24	-4	3

Pour renseigner le tableau, on remplacera à chaque fois x par le nombre choisi*

* Pour 24 et 3 et le procédé sera différent, on fera le chemin inverse

$Pour\ x = 0\ ;\ \ f(0) = 2 \times 0 = 0$

$Pour\ x = -2\ ;\ \ f(-2) = 2 \times (-2) = -4$

$Pour\ x = 3{,}5\ ;\ \ f(3{,}5) = 2 \times 3{,}5 = 7$

5. On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f. Quelle est l'image de 12 par la fonction f ?

L'image de 12 , il suffit de remplacer 12 dans la formule, autrement on calcule f de 12 : f(12)

$$Pour\ x = 12\ ;\ \ f(12) = 2 \times 12$$

6. On dit que x est un antécédent de $f(x)$ par la fonction f. Donner un antécédent de 50 par la fonction f.

x est un antécédent de 50 cela, ce traduit par l'écriture suivante:

$$f(x) = 50\ \ donc\ 2 \times x = 50$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25$$

Définition d'une fonction

Une fonction est un procédé (programme de calcul) qui, à un nombre x, fait correspondre un nombre unique appelé image de x.

Notation

Par une fonction f, l'image d'un nombre x est notée f(x) (lire « f de x »).

On note f : $x \longmapsto f(x)$

Remarque

Une fonction est tout simplement le résultat final d'un programme de calcul

Exemple1

1) Déterminer la fonction f associée au programme de calcul suivant

- Choisir un nombre
- Ajouter le double de ce nombre
- Ajouter le carré du nombre de départ
- Soustraire 10
- Ecrire le résultat

- x
- $x + 2x = 3x$
- $3x + x^2$
- $3x + x^2 - 10$

$$f : x \longmapsto x^2 + 3x - 10$$

ou bien on peut écrire tout simplement : $\mathrm{f(x) = x^2 + 3x - 10}$

2) $Calculer\ l'image\ par\ la\ fonction\ f\ des\ nombres\ suivants$: $2\ ; -3\ ;\ 0$

$Calculer\ l'image\ par\ la\ fonction\ f\ des\ nombres\ suivants: -2\ \ ; 0\ ;\ \ 2$

$On\ sait\ que\ f\ est\ définie\ par\ :\ \mathrm{f(x) = x^2 + 3x - 10}$

$On\ remplace\ x\ dans\ la\ formule\ respectivement\ par\ 2\ ; -3\ ;\ 0$

$\boldsymbol{Pour\ x = -2}$ $\quad f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) - 10$

$$= 4 - 6 - 10$$
$$= -12$$

$\boldsymbol{Pour\ x = 2}$ $\quad f(2) = (2)^2 + 3 \times (2) - 10$

$$= 4 + 6 - 10$$
$$= 0$$

$\boldsymbol{Pour\ x = -3}$ $\quad f(0) = (0)^2 + 3 \times (0) - 10$

$$= 0 - 0 - 10$$
$$= -10$$

Exemple 2

Pour définir la fonction f qui, à tout nombre x, fait correspondre son carré, on note

On lit :

$$\underbrace{f}_{\text{La fonction f}} : \underbrace{x \longmapsto}_{\text{Qui fait correspondre au nombre x}} \underbrace{x^2}_{\text{Le nombre x}^2}$$

$On\ peut\ définir\ cette\ fonction\ en\ écrivant\ l'égalité\ f(x) = x^2$

On lit : f de x égale à x au carré

Compléter le tableau de valeurs suivant

Nombre x	-2	-1	0	1	2
Image de x : f(x)	4	1	0	1	4

$$f(-2) = (-2)^2$$
$$= 4$$

$$f(-1) = (-1)^2$$
$$= 1$$

$$f(0) = (0)^2$$
$$= 0$$

$$f(1) = (1)^2$$
$$= 1$$

$$f(2) = (2)^2$$
$$= 4$$

Exemple 3 : Un exemple concret dans lequel on utilise la notion de fonction

Imaginons que les élèves de 303 et 308 avec leurs professeurs décident d'organiser un repas de fin d'année. Pour cela il doivent s'adresser à un traiteur qui se trouve à Mamoudzou.
Le prix de repas boissons comprise s'élève à 11,5 €.
Pour se rendre à Mamoudzou, le professeur volontaire doit prendre le taxi. Le prix d'un aller retour s'élève à 6 €

Questions

1) Calculer le prix total pour :
   a) 25 personnes qui ont décidé de venir pour ce repas de fin d'année(élèves et professeur)
   b) 37 personnes --

2) On désigne par x le nombre de personnes qui sera présent au repas de fin d'année et par la fonction p qui nous donne le prix total à payer pour x personnes.
   a) Donner la formule de la fonction $p(x)$.
   b) Nous savons que le prix total qui a été payé pour les repas s'élève à 730,5 euros, déterminer le nombre de personnes qui a été présent lors du repas de fin année.

2)Tracer la représentation graphique d'une fonction

Lors d'un championnat de lancer de poids, Igor a fait étudier l'un de ses lancers par un de ses amis mathématicien. Il a trouvé la fonction h suivante qui donne la hauteur du poids (en mètres) en fonction du temps x (en secondes) :

$$h(x) = -5x^2 + 6{,}75x + 2 \text{ pour } x \text{ compris entre 0 et 1,6.}$$

1. L'instant $x = 0$ correspond au moment où Igor lance son poids. À quelle hauteur le poids se trouve-t-il à cet instant ?

2. Calculer l'image de 1,6 par la fonction h.
Donner une interprétation concrète de ce résultat.

3. Compléter le tableau suivant :

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$h(x)$					

4. On souhaite représenter graphiquement la hauteur du poids en fonction du temps.
Dans un repère ayant pour unités 1 centimètre pour 0,1 seconde en abscisses et 5 centimètres pour 1 mètre en ordonnées, placer les points correspondant au tableau précédent.

5. Comment peut-on compléter ce graphique ?

$$h(x) = -5x^2 + 6{,}75x + 2 \text{ pour } x \text{ compris entre 0 et 1,6.}$$

1. L'instant $x = 0$ correspond au moment où Igor lance son poids. À quelle hauteur le poids se trouve-t-il à cet instant ?

2. Calculer l'image de 1,6 par la fonction h.
Donner une interprétation concrète de ce résultat.

3. Compléter le tableau suivant :

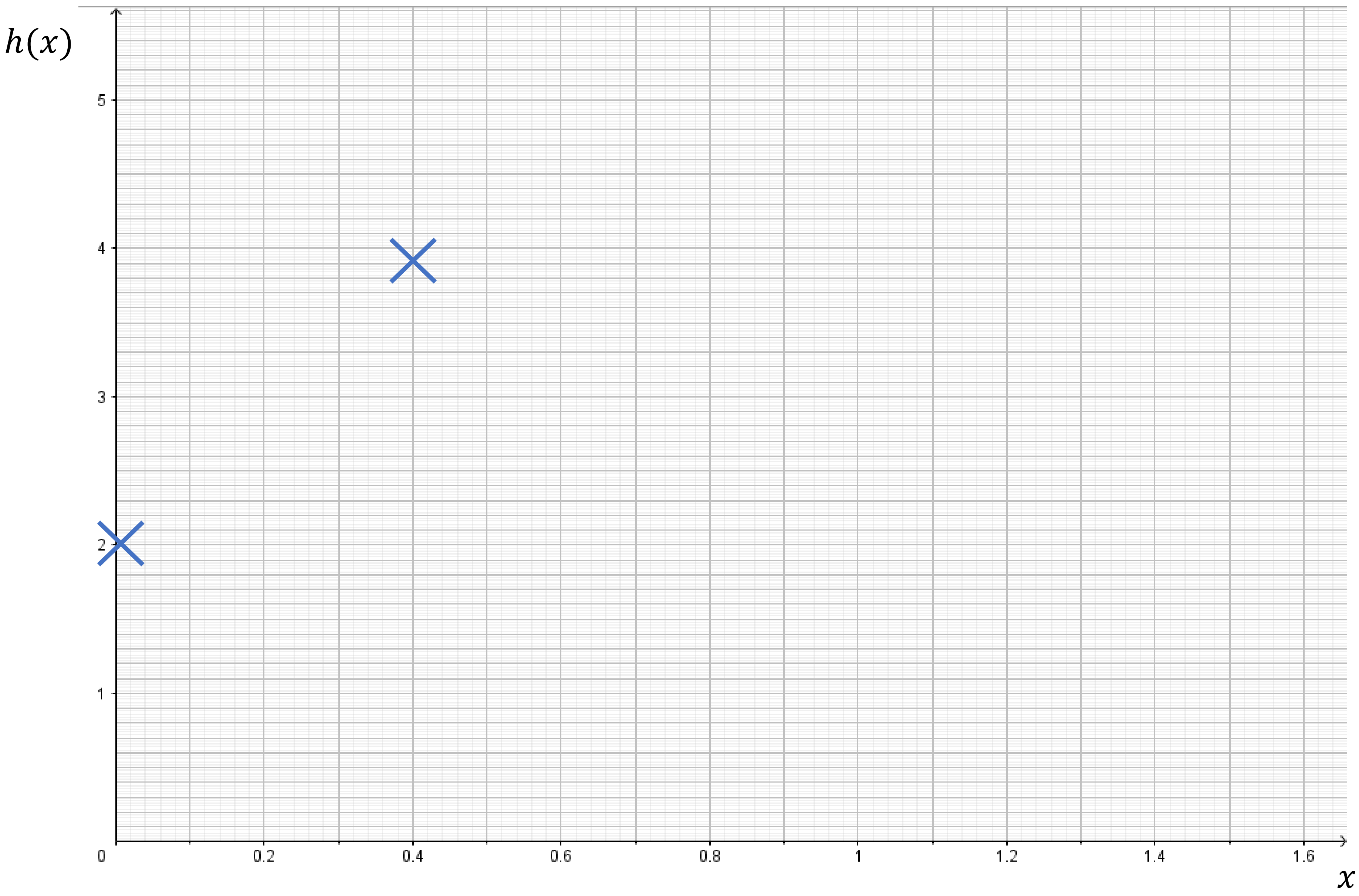
x	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$h(x)$	2	3,9			

$$\begin{aligned} h(0) &= -5 \times 0^2 + 6{,}75 \times 0 + 2 \\ &= 0 + 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(0{,}4) &= -5 \times 0{,}4^2 + 6{,}75 \times 0{,}4 + 2 \\ &= -0{,}8 + 2{,}7 + 2 \\ &= 3{,}9 \end{aligned}$$

4. On souhaite représenter graphiquement la hauteur du poids en fonction du temps.
Placer les points correspondant au tableau précédent

Plaçons les points
de coordonnées :
(0;2)
(0,4;3,9)



Définition

Dans un repère, La représentation graphique d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$. *cette représentation graphique est également appelée courbe représentative de la fonction f.*

Exemple

À l'aide du graphique, déterminer l'image de -2 ; 1 et de 3 par la fonction f